REVISIONS SUR LE CALCUL NUMERIQUE

Objectifs :
- Maîtriser les opérations sur les nombres relatifs en écriture décimale ou fractionnaire.
- Connaître et savoir utiliser les formules opératoires sur les puissances.
- Savoir effectuer un calcul en respectant les priorités opératoires.
- Connaître la notation scientifique.

I) REGLES DE CALCUL SUR LES FRACTIONS

a, b, c et d sont quatre nombres tels que $c \neq 0$ et $d \neq 0$.

A) Définitions

Définition
Une **fraction** est une division effectuée entre deux nombres entiers relatifs. Le nombre du haut s'appelle le **numérateur** et le nombre du bas s'appelle le **dénominateur**.
On peut simplifier une fraction en divisant le numérateur et le dénominateur par un **même nombre entier**. Le numérateur et le dénominateur de la fraction simplifiée doivent être nécessairement **des nombres entiers**.

Exemple 1 :

$$\frac{12}{15} = \frac{12 \div 3}{15 \div 3} = \frac{4}{5}$$

On a divisé le numérateur et le dénominateur de la fraction par un même nombre entier (3). Le numérateur et le dénominateur de la fraction obtenue ($\frac{4}{5}$) sont deux nombres entiers (4 et 5).

Lorsqu'on a simplifié une fraction au maximum, c'est-à-dire lorsqu'on ne peut plus diviser le numérateur et le dénominateur de la fraction par un entier pour obtenir à nouveau deux nombres entiers, on dit que la fraction est **irréductible**.
Dans l'exemple précédent, $\frac{4}{5}$ est une fraction irréductible.

B) Propriétés

1) Addition de fractions

Propriété 1
Lorsque les fractions ont **même dénominateur**, on peut additionner leurs numérateurs.

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

Exemple 2 :

$$\frac{3}{5} + \frac{6}{5} = \frac{3+6}{5} = \frac{9}{5}$$

Propriété 2
Si les dénominateurs sont différents, il faut toujours réduire les deux fractions au même dénominateur.

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{a \times d}{c \times d} + \frac{b \times c}{d \times c} = \frac{ad}{cd} + \frac{bc}{cd} = \frac{ad+bc}{cd}$$

Exemple 3 :

$$\frac{3}{5} + \frac{7}{2} = \frac{3 \times 2}{5 \times 2} + \frac{7 \times 5}{2 \times 5} = \frac{6}{10} + \frac{35}{10} = \frac{6+35}{10} = \frac{41}{10}$$

2) Multiplication de fractions

Propriété
Pour multiplier deux fractions entre elles, il suffit de multiplier les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.

$$\frac{a}{c} \times \frac{b}{d} = \frac{ab}{cd}$$

Exemple 4 :

$$\frac{2}{3} \times \frac{4}{7} = \frac{2 \times 4}{3 \times 7} = \frac{8}{21}$$

3) Division de fractions

Propriété
Lorsqu'on divise une fraction par une autre fraction, on multiplie la première fraction par l'inverse de la deuxième fraction.
Avec b et c différents de 0, nous avons :

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Exemple 5 :

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{4}} = \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{2 \times 4}{3 \times 5} = \frac{8}{15}$$

Remarque
L'inverse d'un nombre a non nul est $\frac{1}{a}$.

L'inverse de $\frac{c}{d}$ est $\frac{d}{c}$.

II) REGLES DE CALCUL SUR LES PUISSANCES

A) Définitions

Soit a un nombre et n un entier positif.

$a^0 = 1$

$a^1 = a$ $\qquad$ $a^{-1} = \frac{1}{a}$

$a^2 = a \times a$ $\qquad$ $a^{-2} = \frac{1}{a \times a} = \frac{1}{a^2}$

$a^3 = a \times a \times a$ $\qquad$ $a^{-3} = \frac{1}{a \times a \times a} = \frac{1}{a^3}$

$a^n = a \times a \times a \times \ldots \times a$ (n facteurs) $\qquad$ $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Définition

Lorsque n est un entier positif non nul, a^n représente le résultat de la multiplication de a par lui-même autant de fois qu'indiqué par le nombre n. n est appelé l'exposant.

Exemple 6 :

$4^0 = 1$

$3^2 = 3 \times 3 = 9$

$2^{-2} = \frac{1}{2 \times 2} = \frac{1}{4}$

Lorsque n est négatif, cela ne veut pas dire que a^n sera négatif ! Nous avons un exemple ci-dessus qui le démontre bien : $2^{-2} = \frac{1}{4} = 0{,}25 > 0$.

B) Ecriture scientifique

Mettre un nombre sous forme scientifique, c'est l'écrire sous la forme $a \times 10^n$ ou $-a \times 10^n$, avec $1 \leq a < 10$ et n entier relatif.

$4503 = 4{,}503 \times 10^3$
$0{,}081 = 8{,}1 \times 10^{-2}$
$182 = 1{,}82 \times 10^2$
$-0{,}00023 = -2{,}3 \times 10^{-4}$

Exemple 7 :

3×5^2 n'est pas un nombre écrit sous forme scientifique. En effet, on doit avoir des puissances de 10 ce qui n'est pas le cas ici (on a des puissances de 5).

$0{,}7 \times 10^3$ n'est pas un nombre écrit sous forme scientifique. En effet, 0,7 n'est pas compris entre 1 et 10.

$5{,}3 \times 10^{-3}$ est un nombre écrit sous forme scientifique. 5,5 est compris entre 1 et 10 et on a des puissances de 10.

Exercices n° 7 page 13, n° 17 page 14 + n° 58 et 63 page 17 du manuel Tran math Nathan 3eme édition 2016.

C) Propriétés

Soit m et n deux entiers relatifs et a et c deux nombres non nuls.

1) Multiplication de puissances

Propriété

$a^m \times a^n = a^{m+n}$

Exemple 8 :

$3^4 \times 3^6 = 3^{4+6} = 3^{10}$

$5^2 \times 5^{-3} = 5^{2+(-3)} = 5^{-1}$

2) Quotient de puissances

Propriété

$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

Exemple 9 :

$\frac{9^2}{9^3} = 9^{2-3} = 9^{-1}$

$\frac{10^{-1}}{10^{-3}} = 10^{-1-(-3)} = 10^{-1+3} = 10^2$

Exercices n° 11 et 14 page 14 + n° 34, 40, 43 et 46 page 15 du manuel Tran math Nathan 3eme édition 2016.

3) Puissance de puissances

Propriété

$(a^m)^n = a^{m \times n}$

Exemple 10 :

$(2^3)^4 = 2^{3 \times 4} = 2^{12}$

$(7^{-1})^{-5} = 7^{(-1) \times (-5)} = 7^5$

4) Produit de puissances de même exposant

Propriété

$a^b \times c^b = (a \times c)^b$

Exemple 11 :

$4^3 \times 5^3 = (4 \times 5)^3 = 20^3$

$(-2)^2 \times 4^2 = (-2 \times 4)^2 = (-8)^2 = 64$

Exercices n° 37 page 15 + n° 57 page 16 + n° 105 p 23 + n° 117 p 24 du manuel Tran math Nathan 3eme édition 2016.

5) Ordre de grandeur

Exemple : La France a environ 60 000 000 d'habitants ; 60 000 000 = 6 x 10^7

La population de la France se compte en dizaines de millions d'habitants ; 10^7 est **l'ordre de grandeur** de cette population.

6) Préfixes et puissances de 10

Puissance	préfixe	symbole	exemples
10^3	**kilo-**	**K**	kilogramme
10^6	**méga-**	**M**	mégatonne ; mégaoctet
10^9	**giga-**	**G**	gigawatt
10^{12}	téra-	**T**	térawatt (puissance centrale nucléaire)
10^{15}	péta-	**P**	
10^{18}	exa-	**E**	
10^{-3}	**milli-**	**m**	millimètre
10^{-6}	**micro-**	**µ**	micromètre
10^{-9}	**nano-**	**n**	nanomètre (taille des virus)
10^{-12}	pico-	**p**	picomètre (atomes)
10^{-15}	femto-	**f**	femtomètre

cas particulier : l'angstrom : Å (10^{-10} mètre)